

УДК 512.5 : 517.982

ПОРЯДКОВЫЕ ВЕРСИИ ТЕОРЕМЫ ХАНА–БАНАХА И ОГИБАЮЩИЕ. I. ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ

Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллин Ф. Б.

Мы приводим здесь общую постановку задачи существования и построения верхней и нижней огибающей для произвольной функции со значениями из пополнения упорядоченного множества S по некоторому классу функций со значениями из S . Задача разбирается пока только для простейшего случая модельного класса однородных функций. Рассматриваем лишь порядково-алгебраические версии без привлечения топологии.

1. Введение. Определения и постановки задач

Одна из классических форм Теоремы Хана–Банаха для векторных пространств X над полем вещественных чисел \mathbb{R} гласит [1]: *любая положительно однородная субаддитивная, и только такая, функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ равна поточечной точной верхней грани всех линейных функций $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, мажорируемых поточечно функцией f в том смысле, что $\varphi(x) \leq f(x)$ для всех $x \in X$* , т.е. функция f совпадает со своей нижней огибающей по классу линейных функций. В «Математической энциклопедии» [2; Хана–Банаха теорема] формулировка Теоремы Хана–Банаха для векторного пространства некорректна: «*В случае действительного пространства X полунорму можно заменить положительно однородным функционалом, ...*», т.е. опущено требование субаддитивности. Тем не менее, основным ориентиром в выборе терминологии, где это возможно, выбрана именно «Математическая энциклопедия» [2]. При этом, поскольку в различных источниках и у разных авторов терминология зачастую существенно разнится, в нашем изложении по возможности все, даже элементарные, определения, понятия и утверждения, встречающиеся нам в литературе хотя бы раз в различных смыслах и трактовках, приводятся полностью во избежание разночтений.

Дадим здесь возможную общую постановку этой проблематики, мотивированную для нас предшествующими применениями утверждений подобного рода в теории функций [3]–[4] (см. также [5]–[8]).

1.1. Упорядоченные множества. Пополнение. Пусть S — (частично) упорядоченное множество [1] с отношением порядка (рефлексивным, транзитивным, антисимметричным) \leq , т. е. пара (S, \leq) ; \geq и $>$ — соотв.¹ обратные к \leq и строгому порядку $< := \leq \cap \neq$.

Пара (S, \leq) , или множество S , *полное снизу* (соотв. *сверху*), если для каждого непустого подмножества $S_0 \subset S$ существует *точная нижняя* (соотв. *верхняя*) *граница* $\inf S_0$ (соотв. $\sup S_0$). Множество S *полное*, если S полное и снизу, и сверху. Подмножество $S_0 \subset S$ *ограничено снизу* (соотв. *сверху*), если существует элемент $s_0 \in S$, для которого $s_0 \leq s$ (соотв. $s \leq s_0$) для всех $s \in S_0$. Множество S *порядково полное снизу* (соотв. *сверху*) [9]–[11]², если для каждого непустого ограниченного снизу (соотв. сверху) подмножества $S_0 \subset S$ существует $\inf S_0 \in S$ (соотв. $\sup S_0 \in S$). Множество S *порядково полное*, если S порядково полное и снизу, и сверху.

Пусть S — *порядково полное*. Если $\inf S$ и/или $\sup S$ не существуют, то часто удобна и полезна операция *(полу-)пополнения* порядково полного S до полного путём добавления символов $\inf S$ и/или $\sup S$, если таких элементов первоначально в S нет. Конкретнее³,

$\Downarrow S_\downarrow := \{\inf S\} \cup S$ — *полупополнение*, или полурасширение, множества S *вниз*, или влево;

$\Uparrow S^\uparrow := S \cup \{\sup S\}$ — *полупополнение*, или полурасширение, множества S *вверх*, или вправо;

$\Updownarrow S^\updownarrow := S_\downarrow \cup S^\uparrow$ — *пополнение*, или расширение, множества S в порядковом смысле,

где порядок \leq продолжен естественным путём на эти пополнения, т. е. $\inf S \leq s \leq \sup S$ для всех элементов $s \in S^\updownarrow$. Очевидно, пополнения $S_\downarrow, S_\uparrow, S^\updownarrow$ с таким отношением порядка соотв. полное, полное снизу, полное сверху упорядоченные множества. При этом, в обозначении \emptyset для пустого множества, естественно полагать

$$\sup \emptyset := \inf S \quad \text{для } \emptyset \subset S_\downarrow, S^\updownarrow, \quad \inf \emptyset := \sup S \quad \text{для } \emptyset \subset S^\updownarrow, S^\uparrow. \quad (0)$$

1.2. Верхняя и нижняя огибающие. Постановки задач. Для множеств X, Y традиционно через Y^X обозначаем множество всех *функций* (отображений, операторов, функционалов, форм и проч.)⁴ $f: X \rightarrow$

¹сокращение для «соответственно»

²lower (upper resp.) order-complete

³в [9] использованы иные обозначения

⁴Для $f: X \rightarrow Y$ в основном будем использовать термин *функция*, индифферентный к природе множеств X и Y [2; Функция].

Y , или $f: x \mapsto f(x)$, $x \in X$, или $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, определённых на X . Для $X_0 \subset X$ $f|_{X_0}$ — сужение f на X_0 .

Пишем $\varphi = f$ на X , если $\varphi(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. В противном случае $\varphi \neq f$ на X . Пусть $Y = S_{\downarrow}^{\uparrow}$ — пополнение порядково полного (S, \leq) . Пишем $\varphi \leq f$ на X , если $\varphi(x) \leq f(x)$ для всех $x \in X$ и говорим, что φ минорирует f , или f мажорирует φ , на X . Отношение « $f \leq \varphi$ на X » определяет отношение поточечного порядка на $(S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Очевидно, множество $(S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ с отношением поточечного порядка, обозначаемого тем же символом \leq , полное, а именно: для произвольного $F \subset (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ всегда существуют функции

$$\sup F: x \mapsto \sup_{f \in F} f(x) \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad \inf F: x \mapsto \inf_{f \in F} f(x) \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X,$$

когда на X рассматриваются и постоянные функции

$$\inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X: x \mapsto \inf S \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad \sup (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X: x \mapsto \sup S \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X, \quad (\star)$$

а для пустого подмножества $\emptyset \subset (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ в соответствии с соглашением (0) определены точные границы

$$\sup \emptyset := \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X, \quad \inf \emptyset := \sup (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X. \quad (\emptyset)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть (S, \leq) порядково полное, $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, а также $\Phi \subset (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Нижнюю (соотв. верхнюю) Φ -огibaющую, или *огibaющую по Φ для f на X* определяем как функцию

$$\begin{aligned} \text{IE}_{\Phi}^f: x \mapsto \sup \{ \varphi(x): \Phi \ni \varphi \leq f \text{ на } X \} \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X \\ \left(\text{соотв. } \text{uE}_{\Phi}^f: s \mapsto \inf \{ \varphi(s): f \leq \varphi \in \Phi \text{ на } X \} \in S_{\downarrow}^{\uparrow}, \quad x \in X \right). \end{aligned}$$

Функция $f: X \rightarrow Y$ с упорядоченными (X, \leq) , (Y, \leq) *возрастающая* на X , если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \leq x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$, и *строго возрастающая*, если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично для убывания. Функция (строго) *возрастающая* или *убывающая* — (строго) *монотонная*. Очевидно, функции $f \mapsto \text{IE}_{\Phi}^f$ и $f \mapsto \text{uE}_{\Phi}^f$, $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, возрастающие на полном множестве $(S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, но, вообще говоря, не строго возрастающие.

В приложениях роль X из Определения 1 часто играет некоторый класс функций [4]–[6], а $S = \mathbb{R}$. Основные общие проблемы, диктуемые Определением 1 в ракурсе Теоремы Хана–Банаха, —

Задача 1. Описать по возможности максимальный класс функций $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, равных своей нижней (верхней) Φ -огигающей.

Задача 2. Указать метод(ы) в той или иной мере конструктивного построения Φ -огигающих lE_{Φ}^f и uE_f^{Φ} для $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$.

В связи с приложениями к теории функций не меньший, а для определённых применений (см., например, [3]–[7]) даже бóльший интерес, чем Задача 1, представляет собой менее требовательная

Задача 1¹. Описать по возможности максимальный класс функций $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, для которого $lE_{\Phi}^f \neq \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ и/или $uE_f^{\Phi} \neq \sup (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$.

В данной работе рассматриваем только классы Φ , состоящие из однородных функций и их естественных обобщений.

Если порядково полное S изначально дополнительно снабжено какими-либо алгебраическими операциями, согласованными с отношением порядка \leq , то продолжения этих операций на пополнения, или (полу)расширения, вообще говоря, с ограничениями, может определяться в каждом конкретном случае в зависимости от постановки рассматриваемых проблем (см. и ср. [12; § 4], [9; 1.3.1]).

Для пары добавляемых символов $\inf S \notin S$ и/или $\sup S \notin S$ часто, в особенности, если на S используется бинарная операция в аддитивной форме как основная, по аналогии с расширениями вещественной прямой \mathbb{R} (с операцией сложения) вверх и/или вниз, используются соотв. обозначения $-\infty := \inf S$ и/или $+\infty := \sup S$, а также, если на S используется бинарная операция в мультипликативной форме как основная, по аналогии с (полу-)расширениями строго положительного луча $]0, +\infty[:= \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ (с операцией умножения) естественнее обозначения 0 и/или $+\infty$. Применяются, но не здесь, — в зависимости от контекста и природы упорядоченного множества (S, \leq) , — также и обозначения соотв. $0, 1; 0, 1; -\infty, 0$ и т. п.

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ и \mathbb{Z} — множества *натуральных* и *целых чисел*. Далее *положительность* понимаем как ≥ 0 , а > 0 — *строгая положительность*. Аналогично понимается *отрицательность*.

Общепринятые алгебраические определения и факты — из стандартного университетского курса алгебры.

2. Огибающие по однородным функциям

2.1. Определение и свойства однородных функций. Пусть (H, \cdot) — *полугруппа с мультипликативной формой записи*, т. е. множество с ассоциативной бинарной операцией $\cdot : H^2 \rightarrow H$, или $\cdot : (h_1, h_2) \mapsto h_1 \cdot h_2 =: h_1 h_2$, $h_1, h_2 \in H$. Множество X — H -*множество*, если на

множестве X определено действие полугруппы H (слева). Точнее, на H -множестве X задана операция умножения (слева) на элементы полугруппы H по правилу $(h, x) \mapsto hx \in X$, $h \in H$, $x \in X$, с аксиомой ассоциативности

Ax0. $h_1(h_2x) = (h_1h_2)x$ для любых $x \in X$ и $h_1, h_2 \in H$.

Если H — полугруппа с *единичным элементом* 1, т.е. *моноид*, то определение H -множества X дополняем ещё одной аксиомой единичного элемента

Ax1. $1x := 1 \cdot x = x$ для любого элемента $x \in X$.

Пусть (H, \cdot) — ещё одна, вообще говоря, другая полугруппа H с другой операцией умножения $\cdot : (h_1, h_2) \mapsto h_1h_2 \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X — H -множество, S — H -множество, а \mathfrak{h} — гомоморфизм полугруппы H в полугруппу H . Функцию $f : X \rightarrow S$ называем *\mathfrak{h} -однородной*, если

$$f(hx) = \mathfrak{h}(h)f(x) \text{ для любых } x \in X \text{ и } h \in H. \quad (\text{hg})$$

Множество \mathfrak{h} -однородных функций $f \in S^X$ обозначаем как $\mathfrak{h}\text{-hg}(X)$.

Всюду далее H и H — как минимум, *полугруппы*, а $\mathfrak{h} : H \rightarrow H$ — *гомоморфизм полугрупп*, X — H -множество, S — H -множество, а при использовании множества $\mathfrak{h}\text{-hg}(X)$ часто не указываем H -множество X , т.е. пишем просто $\mathfrak{h}\text{-hg}$. Кроме того, всюду далее в определениях и, как следствие, в утверждениях, фигурирует только образ $\mathfrak{h}(H) \subset H$ полугруппы H . Поэтому, не умаляя общности, можем всюду считать, что \mathfrak{h} — *эпиморфизм полугрупп*. При этом в случае, когда $(H, \cdot, 1)$ ещё и *группа*, то гомоморфный образ группы H в полугруппе H можно рассматривать как группу с $1 := \mathfrak{h}(1)$ и $(\mathfrak{h}(h))^{-1} := \mathfrak{h}(h^{-1})$, $h \in H$. Таким образом, в случае *группы* H , не умаляя общности, можем считать группой и $H = \mathfrak{h}(H)$.

Далее J — множество индексов произвольной природы. Примеры 1–7 относятся к классическим видам однородных функций.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — «проколота» вещественная ось, $H = H = (\mathbb{R}_*, \cdot, 1)$ — мультипликативная группа с обычным умножением \cdot . При фиксированном $p \in \mathbb{Z}$ определён гомоморфизм $\mathfrak{h} : r \mapsto r^p$, $r \in \mathbb{R}_*$. Пусть при каждом $j \in J$ множество C_j — экземпляр вещественной оси \mathbb{R} и при различных $j_1 \neq j_2$ каждые два экземпляра множеств C_{j_1} и C_{j_2} имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{R}$. Полагаем $X := \cup_{j \in J} C_j$, $S := \mathbb{R}$. В этих соглашениях \mathfrak{h} -однородные функции — это *однородные степени p функции*.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$, $\mathbb{R}_*^+ := \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} =]0, +\infty[$; $H = \mathbb{H} = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$ — мультипликативная группа строго положительных чисел. При фиксированном $p \in \mathbb{R}$ определён гомоморфизм $\mathfrak{h} : r \mapsto r^p$, $r \in \mathbb{R}_*^+$. Пусть при каждом $j \in J$ множество C_j — экземпляр *положительного луча* \mathbb{R}^+ и каждые C_{j_1} и C_{j_2} при $j_1 \neq j_2$ имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{R}^+$. Полагаем $X := \cup_{j \in J} C_j$, $S := \mathbb{R}$. В этих соглашениях \mathfrak{h} -однородные функции — это *положительно однородные степени p функции* [2; Однородная функция].

ПРИМЕР 3. $H = (\mathbb{R}_*, \cdot, 1)$, $\mathbb{H} = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$ — мультипликативные группы; при фиксированном $p \in \mathbb{R}$ гомоморфизм $\mathfrak{h} : r \mapsto |r|^p$, $r \in \mathbb{R}_*$; X и S такие же, как в Примере 1. В этих соглашениях \mathfrak{h} -однородные функции — это *абсолютно однородные степени p функции*.

ПРИМЕР 4. Здесь $r_0, \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}_*^+$; $p \in \mathbb{Z}$; $H = \{r_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{H} = \{\mathbf{r}_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ — мультипликативные циклические группы; гомоморфизм $\mathfrak{h} : r^n \mapsto \mathbf{r}_0^{np}$, $n \in \mathbb{Z}$; X и S такие же, как в Примере 2. При этом \mathfrak{h} -однородные функции — это *ограниченно (относительно H) однородные степени p функции* [14].

ПРИМЕР 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$; $H = ((\mathbb{R}_*^+)^n, \cdot, (1, \dots, 1))$ — группа с покомпонентным умножением векторов, $\mathbb{H} = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$. При фиксированном $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ определён гомоморфизм

$$\vec{r} := (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n = H, \quad \mathfrak{h}(\vec{r}) := \prod_{k=1}^n r_k^{p_k} \in \mathbb{R}_*^+ = \mathbb{H},$$

$X := \mathbb{R}^n$ — векторы-столбцы $\vec{x} \in X$ и $\vec{r} \cdot \vec{x}$ — скалярное произведение, $S := \mathbb{R}$. Здесь \mathfrak{h} -однородные функции — это *положительно однородные степени \vec{p} функции n переменных* [2; Однородная функция].

ПРИМЕР 6. Пусть \mathbb{C} — поле *комплексных чисел*, $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — *проколота комплексная плоскость*. $H = (\mathbb{C}_*, \cdot, 1)$, $\mathbb{H} = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$ — группы; при фиксированном $p \in \mathbb{R}$ гомоморфизм $\mathfrak{h} : z \mapsto |z|^p$, $z \in \mathbb{C}_*$. Пусть при $j \in J$ множество C_j — экземпляр комплексной плоскости \mathbb{C} и каждые C_{j_1} и C_{j_2} при $j_1 \neq j_2$ имеют единственную общую точку $0 \in \mathbb{C}$; $X := \cup_{j \in J} C_j$, $S := \mathbb{C}$. При этом \mathfrak{h} -однородные функции — это *комплексно однородные степени p функции* [13; гл. 1, § 3].

ПРИМЕР 7. Пусть $H = ((\mathbb{C}_*)^n, \cdot, (1, \dots, 1))$ с покомпонентным умножением, $\mathbb{H} = (\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ — мультииндекс, для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^n$ положим $\mathfrak{h}(z) := |z|^{\vec{p}} := |z_1|^{p_1} \dots |z_n|^{p_n}$; $X := \mathbb{C}^n$, $S := \mathbb{C}$. При этом \mathfrak{h} -однородные функции — *комплексно однородные степени \vec{p} функции n комплексных переменных*; ср. с [13; гл. 1, § 3].

Приведём пример с разными видами операций в H и \mathbb{H} .

ПРИМЕР 8. Группы $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{R}_*^+, \cdot, 1)$, $p \in \mathbb{R}$, изоморфизм $\mathfrak{h} := \exp^p: x \mapsto e^{px}$, $x \in \mathbb{R}$; $X = \mathbb{R} = S$; функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ из класса $\exp^p\text{-hg}(\mathbb{R})$, если и только если $f(h+x) = e^{ph}f(x)$ для всех $h, x \in \mathbb{R}$.

Другие общие примеры можно строить для произвольной группы преобразований H области определения X функций $f \in S^X$, действия суперпозиции $(h, f) \mapsto f \circ h$, голоморфизма \mathfrak{h} из H в некоторую, вообще говоря, другую группу \mathbf{H} преобразований множества X . При этом $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}(X)$, если и только если $f \circ h = f \circ (\mathfrak{h}(h))$ для всех $h \in H$. Частный случай — классы функций, инвариантные относительно группы преобразований H , когда в роли группы \mathbf{H} — тривиальная одноточечная группа, состоящая тождественного преобразования id_X множества X , с очевидным гомоморфизмом $\mathfrak{h}(h) = \text{id}_X$ для всех $h \in H$. Возможности дальнейшего развития этого общего примера, Примера 8 в части различных H и \mathbf{H} и операций на них, да и классических Примеров 1–7 поистине неисчерпаемы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. \mathbf{H} -множество S называем *упорядоченным*, если оно снабжено отношением порядка \leq с аксиомой согласованности

Ах2. Для любых $s_1, s_2 \in S$ и $\mathfrak{h} \in \mathbf{H}$ из $s_1 \leq s_2$ следует $\mathfrak{h}s_1 \leq \mathfrak{h}s_2$.

Всюду далее S — *порядково полное упорядоченное \mathbf{H} -множество*.

Распространим понятие \mathfrak{h} -однородной функции на $f \in (S_\downarrow^\uparrow)^X$. Для этого доопределим сначала действия \mathbf{H} на точные грани в пополнении S_\downarrow^\uparrow . Если изначально существуют $\inf S \in S$ и/или $\sup S \in S$, то необходимости в этом нет. Иначе для любого $\mathfrak{h} \in \mathbf{H}$ полагаем

$[\downarrow] \mathfrak{h} \cdot \inf S := \inf S \in S_\downarrow \subset S_\downarrow^\uparrow$, когда не существует $\inf S$ в S ;

$[\uparrow] \mathfrak{h} \cdot \sup S := \sup S \in S^\uparrow \subset S_\downarrow^\uparrow$, когда не существует $\sup S$ в S .

Таким образом, \mathbf{H} -множество S можно расширить до \mathbf{H} -множества S_\downarrow^\uparrow . При этом для любой функции $f: X \rightarrow S_\downarrow^\uparrow$ корректно условие (hg) Определения 2, которое теперь можно дословно распространить и на такие функции f . При этом постоянные функции $\inf (S_\downarrow^\uparrow)^X$ и $\sup (S_\downarrow^\uparrow)^X$, определенные в (\star) , всегда \mathfrak{h} -однородны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество \mathfrak{h} -однородных функций $f \in (S_\downarrow^\uparrow)^X$ со значениями в \mathbf{H} -множестве S_\downarrow^\uparrow в рамках соглашений $[\downarrow]$ и $[\uparrow]$ обозначаем через $\mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow(X)$. Далее при использовании такого множества часто не указываем \mathbf{H} -множество X , т. е. пишем просто $\mathfrak{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$.

Во всех Примерах 2–7 на множестве S можно задать естественный порядок, при котором S становится порядково полным \mathbb{R}_*^+ -множеством,

а $S_{\downarrow}^{\uparrow}$ — упорядоченное \mathbb{R}_*^+ -множество. Например, при $S := \mathbb{C}$ в Примерах 6–7 можно ввести «покомпонентный» порядок: $z_1 \leq z_2$ означает, что $\operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 \leq \operatorname{Im} z_2$, а $\mathbb{C}_{\downarrow}^{\uparrow}$, где Re и Im — операции вычисления действительной и мнимой части, получается из \mathbb{C} добавлением двух символов $(-\infty) + i(-\infty) := \inf \mathbb{C}$ и $(+\infty) + i(+\infty) := \sup \mathbb{C}$; $r((\pm\infty) + i(\pm\infty)) := (\pm\infty) + i(\pm\infty)$, $r \in \mathbb{R}_*^+$.

2.1.1. Верхние и нижние границы. Потребуется элементарная

Лемма 1. Пусть $S_0 \subset S_{\downarrow}^{\uparrow}$, $\mathfrak{h} \in H$. Тогда $\sup_{s \in S_0} \mathfrak{h}s \leq \mathfrak{h} \sup_{s \in S_0} s$ и $\mathfrak{h} \inf_{s \in S_0} s \leq \inf_{s \in S_0} \mathfrak{h}s$. Если же H — группа, то в этих двух неравенствах можно поставить знак равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $s \in S_0$ из $s \leq \sup_{s \in S_0} s$ и аксиомы Ax2 сразу следует $\mathfrak{h}s \leq \mathfrak{h} \sup_{s \in S_0} s$, откуда $\sup_{s \in S_0} \mathfrak{h}s \leq \mathfrak{h} \sup_{s \in S_0} s$. Аналогично для \inf . Если H — группа, то для \sup в $S_{\downarrow}^{\uparrow}$ имеем также

$$\begin{aligned} \sup_{s \in S_0} \mathfrak{h}s &\stackrel{\text{Ax1}}{=} \sup_{s \in S_0} \mathfrak{h}1s = \sup_{s \in S_0} \mathfrak{h}(\mathfrak{h}^{-1}\mathfrak{h})s \stackrel{\text{Ax0}}{=} \sup_{s \in S_0} \mathfrak{h} \mathfrak{h}^{-1}(\mathfrak{h}s) \\ &\quad \left| \text{из доказанного выше} \right| \leq \mathfrak{h}(\mathfrak{h}^{-1} \sup_{s \in S_0} \mathfrak{h}s) \stackrel{\text{Ax0}}{=} (\mathfrak{h}\mathfrak{h}^{-1}) \sup_{s \in S_0} \mathfrak{h}s = \sup_{s \in S_0} \mathfrak{h}s. \end{aligned}$$

Аналогично для \inf . Вместе с предшествующим получаем требуемое.

В дополнение к Определениям 2–4 дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функцию $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ называем \mathfrak{h} -полуоднородной снизу (соотв. сверху) если имеем $f(hx) \leq \mathfrak{h}(h)f(x)$ (соотв. $\mathfrak{h}(h)f(x) \leq f(hx)$) для всех $x \in X$ и $h \in H$. Множество всех таких функций обозначаем как $\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}(X)$ (соотв. $\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\uparrow}(X)$). При этом множество X часто не указываем. Очевидно, $\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow} \cap \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow} = \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$.

Предложение 1. Если $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ (соотв. $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$), то функция $\sup F \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ (соотв. $\inf F \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$). В частности, если H — это группа, то из $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$ следует $\sup F, \inf F \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}$ при $F(x) := \{f(x) : f \in F\}$

$$(\sup F)(hx) = \sup_{f \in F} f(hx) \leq \sup_{f \in F} \mathfrak{h}(h)f(x) = \sup \{\mathfrak{h}(h)s : s \in F(x)\}$$

$$\left| \text{Лемма 1 с } S_0 := F(x) \right| \leq \mathfrak{h}(h) \sup \{s : s \in F(x)\} = \mathfrak{h}(h)(\sup F)(x).$$

Здесь в случае $F \subset \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$ первый знак неравенства \leq можно заменить на равенство, а когда H — группа, и следующий знак \leq поменять на знак $=$. Аналогично для \inf . Предложение 1 доказано.

Для $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ в обозначениях Определений 1–2, 4–5 всегда существуют участвующие ниже нижние и верхние огибающие

$$lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f \leq lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f \leq lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}}^f \leq f \leq uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}} \leq uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}} \leq uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}} \quad (\text{E})$$

на X , где в случае $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$ всюду можно поставить равенства.

Из Предложения 1 и определений легко получаем

Следствие 1. Для $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ всегда

$$lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f, lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f, lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}}^f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow} \quad \text{и} \quad uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}, uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}, uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}} \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow},$$

а если H — группа, то $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f, lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f, uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}, uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}} \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$.

Это Следствие 1 сразу решает Задачу 1 для ряда классов Φ :

Теорема 1. Пусть $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Справедливы утверждения

$$[l] \quad lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}}^f = f \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}.$$

$$[u] \quad f = uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\downarrow}.$$

Пусть, в дополнение, H — группа. Эквивалентны три соотношения: 1) $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$; 2) $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f = f$; 3) $f = uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}$.

Случай класса $\Phi = \mathfrak{h}\text{-hg}$ потребует дополнительных сведений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве [l]–[u] дополнительные условия на полугруппы H и H не накладывались. В случае же $\Phi = \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$ в Теореме 1 для возможности использования Предложения 1 и Леммы 1 предполагалось, что H — группа.

2.1.2. Орбиты и стационарные элементы. Для элемента x из H -множества X определяется *орбита* этого элемента

$$\text{orb}_X(x) := H \cdot x :=: Hx := \{hx : h \in H\}. \quad (\text{o})$$

Элемент $x \in X$ *стационарный*, если $\text{orb}_X(x) = \{x\}$.

Основное свойство орбит. Для группы H орбиты не зависят от выбора представителя и либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть H — группа. Тогда для любых $s \in S_{\downarrow}^{\uparrow}$ в рамках соглашений [↓] и [↑] определены орбиты $\text{orb}_{S_{\downarrow}^{\uparrow}}(s)$, а также стационарные элементы в $S_{\downarrow}^{\uparrow}$. В частности, элементы $\inf S \in S_{\downarrow}^{\uparrow}$ при $\inf S \notin S$ и $\sup S \in S_{\downarrow}^{\uparrow}$ при $\sup S \notin S$ — стационарные. Пусть $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$. Тривиально проверяется

- 1) $f(\text{orb}_X(x)) \subset \text{orb}_{S^\uparrow_\downarrow} f(x)$; в частности, если $f(x)$ — стационарный элемент в S^\uparrow_\downarrow , то $f(\text{orb}_X(x)) = \{f(x)\}$;
- 2) если \mathfrak{h} — эпиморфизм, то $f(\text{orb}_X(x)) = \text{orb}_{S^\uparrow_\downarrow} f(x)$ и для стационарного элемента $x \in X$ элемент $f(x)$ стационарный в S^\uparrow_\downarrow .

Так, для $S := \mathbb{R}$ из Примеров 2–5 в S^\uparrow_\downarrow с $-\infty := \inf \mathbb{R}$, $+\infty := \sup \mathbb{R}$ и $\mathbb{H} := \mathbb{R}^+_*$ — пять орбит $\{\{-\infty\},]-\infty, 0[, \{0\},]0, +\infty[, \{+\infty\}\}$ и три стационарных элемента $\{-\infty, 0, +\infty\}$, а для $S := \mathbb{C}$ в Примерах 6–7 орбиты — это либо $\{0\}$, либо два элемента $(\pm\infty) + i(\pm\infty)$, либо любой из лучей $\{re^{i\theta} : r \in]0, +\infty[\} \subset \mathbb{C}$ со всевозможными $\theta \in (-\pi, \pi]$, а стационарных элементов тоже три: $\{0\}$ и $(\pm\infty) + i(\pm\infty)$.

2.1.3. Расщепление функции по орбитам. Пусть H — группа. По Основному свойству орбит из п. 2.1.2 H -множество X можно представить в виде объединения

$$X = \bigcup_{j \in J} \text{orb}_X(x_j), \quad J — \text{множество индексов}, \quad (\text{o1})$$

не пересекающихся орбит $\text{orb}_X(x_j)$ с выбранными по аксиоме выбора представителями $x_j \in \text{orb}_X(x_j)$. Тогда каждую орбиту $\text{orb}_X(x_j)$ можно рассматривать как H -множество, а произвольная функция $f \in (S^\uparrow_\downarrow)^X$ однозначно определяется своими сужениями

$$f_j := f|_{\text{orb}_X(x_j)}, \quad j \in J. \quad (\text{o2})$$

Более того, каждая функция $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^\downarrow$ полностью определяется своими значениями $f(x_j)$, поскольку может быть однозначно продолжена на всю орбиту $\text{orb}_X(x_j)$ по правилу

$$f(hx_j) := \mathfrak{h}(h)f(x_j), \quad h \in H. \quad (\text{o3})$$

Следующий результат решает Задачу 1 для класса $\Phi = \mathfrak{h}\text{-hg}$.

Теорема 2. Пусть H и \mathbb{H} — группы, $f \in (S^\uparrow_\downarrow)^X$, $\text{im } f \subset S^\uparrow_\downarrow$ — образ функции f в S^\uparrow_\downarrow . Справедливы следующие три утверждения.

[1] $\text{IE}^f_{\mathfrak{h}\text{-hg}} = f$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих взаимоисключающих двух условий:

$$[11] \quad \text{im } f \subset S^\uparrow \text{ и } f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^\downarrow,$$

$$[12] \quad \text{inf } S \notin S \text{ и } f = \text{inf } (S^\uparrow_\downarrow)^X \text{ на } X \text{ (см. } (\star) \text{ в 1.2)}.$$

[u] $f = uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих взаимоисключающих двух условий:

$$[u1] \quad \text{im } f \subset S_{\downarrow} \text{ и } f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow},$$

$$[u2] \quad \sup S \notin S \text{ и } f = \sup (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X \text{ на } X \text{ (см. } (\star) \text{ в 1.2).}$$

$$[lu] \quad lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f = uE_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}, \text{ если и только если } f \in \mathfrak{h}\text{-hg}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $[lu]=[l] \cap [u]$ следует из $[l]$ и $[u]$. Утверждение $[u]$ доказывается так же, как и $[l]$, которое и докажем. Сначала необходимость. Если $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f$, $\inf S \notin S$, а f принимает значение $\inf S$ хотя бы раз, то множество функций $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией f , пусто. Следовательно, по Определению 1 имеем $f = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ (см. (\emptyset) в 1.2), т. е. $[l2]$. Пусть теперь $\inf S \in S$ или функция $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ нигде не принимает значение $\inf S$, что означает выполнение условия $\text{im } f \subset S_{\downarrow}^{\uparrow}$. Тогда по Следствию 1 в части, когда H — группа, имеем $f = lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$, т. е. $[l1]$.

Теперь достаточность. Если выполнено $[l2]$, то множество функций $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией $f = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, пусто. Отсюда ввиду (\emptyset) из 1.2 нижняя огибающая $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f$ всюду на X принимает значение $\inf S$, т. е. в этом случае $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Допустим теперь, что выполнено $[l1]$. Пусть $x_0 \in X$ и $s_0 \in S$ — произвольный элемент, для которого $s_0 \leq f(x_0)$. Будем пользоваться расщеплением функции f по непересекающимся орбитам, описанном в начале п. 2.1.3 посредством (o1)–(o2). Здесь мы уже пользуемся тем, что H — группа. Найдётся индекс j_0 , для которого $x_0 \in \text{orb}_X(x_{j_0})$. Поскольку в этом случае $\text{orb}_X(x_0) = \text{orb}_X(x_{j_0})$, то, используя переиндексацию, можем считать, что $x_{j_0} = x_0$. Для каждой из остальных орбит $\text{orb}_X(x_j)$ с $j \neq j_0$ выберем, вновь используя аксиому выбора, произвольный элемент $s_j \in S$, удовлетворяющий условию $s_j \leq f(x_j)$. Построение функции $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемой функцией $f = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$, а также удовлетворяющей условию $\varphi(x_0) = s_0 \leq f(x_0)$, проведём по схеме (o3), а именно: положим $\varphi(x_j) = s_j$ для всех $j \in J$ и продолжим φ с элемента x_j на всю орбиту $\text{orb}_X(x_j)$ по правилу $\varphi(hx_j) := \mathfrak{h}(h)\varphi(x_j) = \mathfrak{h}(h)s_j$, $h \in H$. Построенная функция $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$ минорирует функцию f , откуда, в силу произвола в выборе $s_0 \in S$ с $s_0 \leq f(x_0)$, получаем $\sup\{\varphi(x_0) : \varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}, \varphi \leq f \text{ на } X\} = f(x_0)$. По Определению 1 это, ввиду произвола в выборе элемента $x \in X$, означает $lE_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На полугруппы H и H при доказательстве необходимости накладывалось только одно дополнительное условие: H — группа.

Напротив, при доказательстве достаточности применялось тоже только одно дополнительное условие, но другое: H — группа, из которого, впрочем, следует, что $\mathbf{H} = \mathbf{h}(H)$ — группа.

2.1.4. Регуляризованные миноранта и мажоранта. Наряду с (Е) из п. 2.1.1 дадим ещё один способ конструирования миноранты и мажоранты функции $f \in (\mathbf{S}_\downarrow^\uparrow)^X$. Для этого, в предположении, что \mathbf{H} — это группа, определим возрастающие на $(\mathbf{S}_\downarrow^\uparrow)^X$ функции $f \mapsto f_\wedge$ и $f \mapsto f^\vee$, $f \in (\mathbf{S}_\downarrow^\uparrow)^X$, действующие по правилу

$$f_\wedge(x) := \inf_{h \in H} (\mathbf{h}(h))^{-1} f(hx), \quad f^\vee(x) := \sup_{h \in H} (\mathbf{h}(h))^{-1} f(hx), \quad x \in X,$$

— соотв. *регуляризованная миноранта* и *регуляризованная мажоранта* функции f . Для моноида H , очевидно, $f_\wedge \leq f \leq f^\vee$ на X .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Любую полугруппу H без единичного элемента можно превратить в моноид, просто присоединив формальный единичный элемент 1 и определив $1h := h =: h1$ для всех $h \in H$. При этом, очевидно, гомоморфизм \mathbf{h} корректно продолжается на моноид $H \cup \{1\}$ по правилу $\mathbf{h}(1) = 1 \in \mathbf{H}$ — здесь группа.

Предложение 3. Всегда $f_\wedge \in \mathbf{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$ и $f^\vee \in \mathbf{h}\text{-hg}_\uparrow$. Если же, в дополнение, H — группа, то $f_\wedge, f^\vee \in \mathbf{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $h_0 \in H$ имеем

$$\begin{aligned} f_\wedge(h_0x) &= \inf_{h \in H} (\mathbf{h}(h))^{-1} f(h(h_0x)) = \inf_{h \in H} \mathbf{h}(h_0) (\mathbf{h}(h) \mathbf{h}(h_0))^{-1} f((hh_0)x) \\ &= \inf_{h \in H} \mathbf{h}(h_0) (\mathbf{h}(hh_0))^{-1} f((hh_0)x) \\ &\quad \left| \text{Лемма 1 при } S_0 := \{ \mathbf{h}(hh_0) \}^{-1} f((hh_0)x) : h \in H \} \text{ с } \mathbf{h}(h_0) \text{ вместо } \mathbf{h} \right| \\ &= \mathbf{h}(h_0) \inf_{h \in H} (\mathbf{h}(hh_0))^{-1} f((hh_0)x) = \mathbf{h}(h_0) \inf_{h \in Hh_0} (\mathbf{h}(h))^{-1} f(hx) \\ &\geq \mathbf{h}(h_0) \inf_{h \in H} (\mathbf{h}(h))^{-1} f((h)x) = \mathbf{h}(h_0) f_\wedge(x) \end{aligned}$$

ввиду $Hh_0 := \{hh_0 : h \in H\} \subset H$ для всех $x \in X$. Отсюда сразу следует $f_\wedge \in \mathbf{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$. Если же H — группа, то $Hh_0 = H$ и знак неравенства \geq здесь можно заменить на $=$. Аналогично рассматривается и f^\vee . Предложение 3 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства нетрудно видеть, что для выполнения $f_\wedge \in \mathbf{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$ достаточно требовать, чтобы в H существовали правый единичный элемент и правый обратный для любого элемента из H . Для $f^\vee \in \mathbf{h}\text{-hg}_\uparrow^\downarrow$ то же самое, но с левыми.

Следующий результат решает Задачу 2 для различных классов Φ однородных функций.

Теорема 3. Пусть H, \mathfrak{H} — группы, $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Тогда

- I. $\mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f = f_{\wedge} \leq f \leq f^{\vee} = \mathbb{I}E_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}$ на X .
- II. $\mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f_{\wedge}$ на X тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух взаимоисключающих условий:
 - II1. $\text{im } f_{\wedge} \subset S^{\uparrow}$;
 - II2. $\inf S \notin S$ и $f_{\wedge} = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ на X (см. (\star) в 1.2).
- III. $f^{\vee} = \mathbb{I}E_f^{\mathfrak{h}\text{-hg}}$ на X тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух взаимоисключающих условий:
 - III1. $\text{im } f^{\vee} \subset S_{\downarrow}$;
 - III2. $\sup S \notin S$ и $f^{\vee} = \sup (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ на X (см. (\star) в 1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Рассмотрим регуляризованную миноранту $f_{\wedge} \leq f$. По Предложению 3 и Определению 1 $f_{\wedge} \leq \mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f$ на X . Кроме того, для произвольной функции $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$, мажорируемой функцией f , при всех $x \in X$ по Определению 4 имеем

$$\varphi(x) = (\mathfrak{h}(h))^{-1} \varphi(hx) \stackrel{\text{Ax2}}{\leq} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f(hx) \quad \text{для всех } h \in H.$$

Отсюда $\varphi(x) \leq \inf_{h \in H} (\mathfrak{h}(h))^{-1} f(hx) = f_{\wedge}(x)$ для всех $x \in X$. Это означает, что $\mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}}^f \leq f_{\wedge}$ на X , и доказывает I для f_{\wedge} .

Аналогично устанавливается равенство для f^{\vee} из I.

II. *Необходимость.* Если $\inf S \notin S$ и $f_{\wedge}(x_0) = \inf S$, то, ввиду доказанного в предыдущем п. I, $\mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f \leq f_{\wedge}$ на X , т. е. $\mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f(x_0) = \inf S$. Отсюда множество функций $\varphi \in \mathfrak{h}\text{-hg}$, мажорируемых функцией f , а значит и f_{\wedge} , пусто и $\inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X = \mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f_{\wedge}$. В противном случае остаётся только ситуация II2, т. е. $\text{im } f_{\wedge} \subset S^{\uparrow}$.

Достаточность. Если выполнено II2, то из п. I сразу следует $\mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f \leq f_{\wedge} = \inf (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ на X , что и нужно.

Пусть теперь $\text{im } f_{\wedge} \subset S^{\uparrow}$. По Предложению 3 $f_{\wedge} \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\uparrow}^{\downarrow}$, т. е. выполнено условие [11] Теоремы 2 для функции f_{\wedge} вместо f . Следовательно, по Теореме 2 имеем $\mathbb{I}E_{\mathfrak{h}\text{-hg}}^f = f_{\wedge}$ на X .

III доказывается аналогично.

Отметим далее некоторые простейшие факты об однородных функциях, которые могут быть полезными.

2.1.5. Умножение функций слева. Для произвольной функции $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$ определено умножение (слева) функции f на элементы $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$, а именно: $\mathfrak{h}f: x \mapsto \mathfrak{h}f(x)$, $x \in X$.

Предложение 4. Если полугруппа \mathfrak{H} коммутативна, то для любого элемента $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$ из $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}$ (соотв. $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$) следует $\mathfrak{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}$ (соотв. $\mathfrak{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$). В частности, для $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$ получаем $\mathfrak{h}f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(f \in \mathfrak{h}\text{-hg}^{\uparrow}) \implies (\mathfrak{h}f)(hx) \leq \mathfrak{h}\mathfrak{h}(h)f(x) = |\text{коммутативность}| = \mathfrak{h}(h)\mathfrak{h}f(x) = \mathfrak{h}(h)(\mathfrak{h}f)(x)$, $x \in X$, $h \in H$. Аналогично для $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}$. Отсюда заключение и для $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}$.

2.1.6. Локализуемость (полу)однородных функций. Покажем, что при определённых ограничениях на (полу)группу H условия (полу)однородности из Определений 2 и 4–5 можно проверять лишь для порождающей части H . Напомним, что подмножество $H' \subset H$ порождает полугруппу H , если множество всех конечных произведений вида $h_1 \cdots h_n$ с $h_k \in H'$ при каждом $k = 1, \dots, n$ совпадает с H , и порождает группу H , если множество всех конечных произведений того же вида, но с $h_k \in H'$ или $h_k^{-1} \in H'$ при каждом $k = 1, \dots, n$, — это в точности группа H .

Теорема 4. Пусть $f \in (S_{\downarrow}^{\uparrow})^X$. Если для любой неодноточечной орбиты $\text{orb}_X(\cdot)$ из (о) п. 2.1.2 найдётся подмножество $H' \subset H$, порождающее полугруппу H , с которым

$$f(hx) \leq \mathfrak{h}(h)f(x) \quad (\text{sh})$$

для всех $h \in H'$ и $x \in \text{orb}_X(\cdot)$, то (sh) выполнено для всех $h \in H$ и $x \in X$. Аналогично при замене \leq в (sh) на \geq или $=$.

Если для любой неодноточечной орбиты $\text{orb}_X(\cdot)$ найдётся подмножество $H' \subset H$, порождающее группу H , с которым $f(hx) = \mathfrak{h}(h)f(x)$ для всех $h \in H'$ и $x \in \text{orb}_X(\cdot)$, то $f \in \mathfrak{h}\text{-hg}_{\downarrow}^{\uparrow}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала H — полугруппа. Тогда в условиях Теоремы 4 для произвольного $h \in H$ найдутся $h_1, \dots, h_n \in H'$, $n \in \mathbb{N}$, с которыми $h = h_1 \cdots h_n$. Отсюда $f(hx) = f(h_1 \cdots h_n x) \stackrel{\text{Ax2, (sh)}}{\leq} \mathfrak{h}(h_1) \cdot f(h_2 \cdots h_n x) \stackrel{\text{Ax2, (sh)}}{\leq} \cdots \stackrel{\text{Ax2, (sh)}}{\leq} \mathfrak{h}(h_1) \cdots \mathfrak{h}(h_n)f(x) = \mathfrak{h}(h_1 \cdots h_n)f(x) = \mathfrak{h}(h)f(x)$ для любых $h \in H$ в произвольной орбите $\text{orb}_X(\cdot) \ni x$, а значит и любых $x \in X$, что и требуется. Для \geq и $=$ аналогично.

Пусть теперь H — группа, а значит и $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}(H)$ — группа. Для фиксированной орбиты $\text{orb}(\cdot)$ с соответствующим порождающим H множеством H' рассмотрим элемент $h \in H$, для которого $h^{-1} \in H'$. Тогда для

$x \in \text{orb}(\cdot)$ имеем $f(x) = f(h^{-1}hx) = \mathfrak{h}(h^{-1})f(hx) = (\mathfrak{h}(h))^{-1}f(hx)$, т. е. $f(hx) = (\mathfrak{h}(h))f(x)$ для любых $x \in \text{orb}_X(\cdot)$ и $h^{-1} \in H'$. Таким образом, выполнено (sh) с равенством вместо неравенства \leq для всех h из множества $H' \cup (H')^{-1} \subset H$, порождающего H как полугруппу. Остаётся воспользоваться доказанным.

ПРИМЕР 9. При $H = \mathbb{R}_*^+$ с обычной структурой мультипликативной группы достаточно проверять \mathfrak{h} -однородность на сколь угодно коротких непустых открытых интервалах $]r_1, r_2[\subset \mathbb{R}_*^+$, поскольку, как легко показать, любой такой интервал порождает группу \mathbb{R}_*^+ .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ КОММЕНТАРИЙ. Содержательные утверждения по Задаче 1¹ легко следуют из Теорем 1–3. Другие варианты решения этой Задачи, не опирающиеся на эти Теоремы нам пока неизвестны. Остаётся неясным также вопрос — в какой мере установленные здесь результаты для группы H могут быть перенесены на полугруппы H . Скорее всего всегда есть контрпримеры. Дальнейшие перспективы — рассмотрение Φ -огигающих для других классов Φ , как-то: (полу=суб-или супер-)аддитивных, с условиями типа выпуклости–вогнутости, связанных с операциями \sup или \inf (идемпотентные, или тропические, версии) и проч. Возможны вариации и в рамках структуры множества X — теоретико-множественной, алгебраической, топологической, геометрической, порядковой и далее. Объём таких исследований необозрим. При этом представляется важным изучение подобных вопросов для функций со значениями именно в пополнении (расширении) S_\downarrow^\uparrow в связи с приложениями (см., например, [3]–[6] — в теории функций, [15] — в оптимизации).

Литература

1. Акилов Г. П. Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука, 1978.
2. Математическая энциклопедия. М.: «Советская энциклопедия», 1977–1985.
3. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН, сер. матем.—2001.—Т. 65.—№ 4—С. 205–224.
4. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН, сер. матем.—2001.—Т. 65.—№ 5—С. 167–190.
5. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов // В сб. статей «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. Часть I. Комплексный анализ.» Уфа.—1996.—УНЦ РАН. Институт математики с ВЦ.—С. 122–131.
6. Хабибуллин Б. Н. Применения в комплексном анализе двойственного представления функционалов на векторных решетках // Математический форум. Т. 4. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и

- их приложениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и PCO-A.—2010. С. 102–116 (Итоги науки. Юг России).
7. *Картак В. В., Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление функционалов на проективных пределах векторных решеток // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 1–7 июля 2009 г.). Казанское математическое общество.—Т. 38.—2009.—С. 146–148.
 8. *Хабибуллин Б. Н.* Аналоги теоремы Хана-Банаха для (полу)групп: построение нижней огибающей // Материалы Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». Казань, 2–6 июня 2014 г. Казанский (Приволжский) федеральный университет.—2014.—С. 75–76.
 9. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.
 10. *Simons S.* From Hahn-Banach to Monotonicity.—Berlin: Springer Science+Business Media B.V. Lect. Notes in Math.—V. 1963, 2008.
 11. *Borwein J. M. and Vanderwerff J. D.* Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples.— N. Y.: Cambridge University Press, 2010.
 12. *Лейтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
 13. *Лелон Л., Груман Л.* Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.
 14. *Schlude K.* Bemerkung zu beschränkt homogenen Funktionen // Elemente der Mathematik.—1999.—V. 54.—P. 30–31.
 15. *Dinha N., Ernst E., López M. A., Volled M.* An approximate Hahn-Banach theorem for positively homogeneous functions // Optimization: A Journal of Math. Programming and Operations Research—2015.—V. 64, 5.—P. 1321–1328.

ХАБИБУЛЛИН БУЛАТ НУРМИЕВИЧ
 Башкирский государственный университет
 заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии, профессор
 РФ, 450076, г. Уфа, ул. З. Валиди, 32
 E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru

РОЗИТ АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ
 аспирант кафедры высшей алгебры и геометрии
 E-mail: Rozit@mail.ru

ХАБИБУЛЛИН ФАРХАТ БУЛАТОВИЧ
 доцент кафедры высшей алгебры и геометрии
 E-mail: KhabibullinFB@list.ru

ORDER VERSIONS OF THE HAHN-BANACH THEOREM AND ENVELOPES. I. HOMOGENEOUS FUNCTIONS

Bulat N. Khabibullin, Aleksey P. Rozit, Farkhat B. Khabibullin

We present here a general formulation of the problem of existence and construction of upper and lower envelope for a function with values in a completion of ordered set S for a certain class of functions with values in S . The task is parsed only for the simplest case of model class of homogeneous functions. We consider only order-algebraic versions without the involvement of the topology.